

社会資本の共同更新による節約費用の配分に関する研究

福山コンサルタント 正会員 岩倉幸司
鳥取大学工学部 正会員 谷本圭志
鳥取大学工学部 正会員 喜多秀行

1. はじめに

これまでに蓄積してきた社会資本を効率的に維持管理していくことは今後の重要な課題である。社会資本はそれぞれの管理主体が個別に維持管理している場合が多いが、各々の維持管理を調整し、まとめて同時に更新する（以後、「共同更新」と呼ぶ）ことで全体の費用を削減できる可能性がある。しかし、個々の主体が選好する更新のタイミングが一致する保証はない。本研究では、共同更新で節減できる費用を主体に適切に配分することで効率的に総期待割引費用を削減するメカニズムを検討する。

2. モデル

社会資本の維持管理政策の導出にマルコフ決定過程、費用の配分手法に協力ゲーム理論を援用し、これらを組み合わせた動的協力ゲームを用いてモデルを構築する。主体の集合を $M=\{1,2,\dots,N\}$ 、任意の主体を n で表す。

主体が管理する社会資本の全体を一つのシステムとしてとらえ、個々の主体が管理する資本をシステムの要素と呼ぶ。各主体は一つの要素を管理しているものとする。よって、プレイヤー n が管理する要素を「要素 n 」と呼ぶことができる。要素 n の劣化状態を i_n で表す。ここに、劣化状態 i_n は離散値で与え $0 \leq i_n \leq s+1$ である。劣化状態 i_n の数値が大きければ劣化が進行していることを表し、 $s+1$ は故障状態である。時間も離散的であるとする。各要素の劣化状態のベクトルをシステムの状態と呼び、 $I=(i_1, i_2, \dots, i_N)$ で表す。プレイヤーの行動集合は、更新をするか、しないかのいずれであるとする。

劣化状態 i_n での要素 n の更新費用を $c_n(i_n)$ 、更新しなかった場合に費やす運転費用を $l_n(i_n)$ で表す。更新した場合、次期には当該の要素の劣化状態は新品状態、つまり 0 になる。更新しなかった場合、現在の劣化状態が i_n である場合に次期に確率 $p_n(j_n | i_n)$ で劣化状態 j_n になるとする。ただし、 $p_n(j_n | i_n) = 0$ ($j_n < i_n$) であるとする。一期当たりの割引因子を β ($0 < \beta < 1$) で表す。また、各要素の劣化状態の観測には費用と時間がかからず、更新す

る場合には一期間を要するものとする。すると、状態が I であるもとで、今期に共同更新に関する費用配分に参加しなかった場合、すなわち、自身にとって費用が最小となる行動が今期に選択できる場合における任意の要素 n の総期待割引費用 $V_n(I)$ は次式で表される。

$$V_n(I) = \min [c_n(i_n) + \beta \sum_{j_1=i_1}^{s+1} \sum_{j_2=i_2}^{s+1} \dots \sum_{j_N=i_N}^{s+1} p_1(j_1 | i_1) p_2(j_2 | i_2) \dots p_N(j_N | i_N) \phi_n(J^{-n} \cup \{0\}^n), \quad (1)$$

$$l_n(i_n) + \beta \sum_{j_1=i_1}^{s+1} \sum_{j_2=i_2}^{s+1} \dots \sum_{j_N=i_N}^{s+1} p_1(j_1 | i_1) p_2(j_2 | i_2) \dots p_N(j_N | i_N) \phi_n(J)]$$

ここに $J^{-n} \cup \{0\}^n = (i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, 0, i_{n+1}, \dots, i_N)$ であり、 $\phi_n(I)$ は状態 I のもとで $V_n(I)$ を準拠値として総期待割引費用を配分した場合における要素 n の総期待割引費用の配分値である。ただし、当該の要素が今期の費用配分に参加しなかった場合には、その他の要素は更新しないものとする。(1)式を用いて、どの要素を更新するのかを決定する。本研究では、Dekker¹⁾が提案した *penalty function* を用いてその状況をモデル化する。*penalty function* は次式のように定義される。ただし、 $h_n^-(I)$ は状態 I のもとで要素 n を更新した場合における準拠値からの増分費用であり、 $h_n^+(I)$ は状態 I のもとで要素 n を更新しなかった場合におけるそれである。

$$h_n^-(I) = c_n(i_n) + \beta P_1(I) - V_n(I) \quad (2)$$

$$h_n^+(I) = l_n(i_n) + \beta P_2(I) - V_n(I) \quad (3)$$

ここに、 $P_1(I)$ は(1)式の右辺の第一部（更新した場合の総割引期待費用）の第二項を、 $P_2(I)$ は(1)式の右辺の第二部（更新しなかった場合の総割引期待費用）の第二項を表している。*penalty function* を用いると、要素の集合 S を共同で更新した場合に得られる総期待割引費用の節約額、すなわち、集合 S の特性関数は次式のよ

うに得られる。ここに、 $u(S)$ は要素の集合 S をまとめて同時に更新した場合にその時点で得られる更新費用の節約額である。なお、 $u(S) \geq 0 (\forall S \subset M)$, $u(\emptyset) = 0$ である。

$$v(S; I) = \max_{T \subset S} [u(T) - \sum_{n \in T} h_n^-(I) - \sum_{n \in S \setminus T} h_n^+(I)] \quad (4)$$

(4)式は、要素の集合 S において、その集合にとって最も総期待割引費用の節約額が大きくなるように更新する要素を決定することを表している。その決定に基づいて、節約額が $v(S; I)$ で与えられる。すると、費用関数は次式で与えられる。

$$C(S; I) = \sum_{n \in S} V_n(I) - v(S; I) \quad (5)$$

以上より、共同更新に関する費用配分に今期参加した場合における任意の要素 n に関する総期待割引費用の配分値は次式で表される。ただし、 F は費用配分手法である。

$$\phi_n(I) = F(C(S; I) | \forall S \subset M) \quad (6)$$

3. 費用配分ゲームの特性

上の(1)~(6)式で表される費用配分メカニズムは動的な環境下にあるため、どのような場合に共同更新に関する主体の合意が得られるのかについては自明ではない。そこで、合意が得られるための必要条件である優加法性、合意が得られる配分の集合が広範であることを示す凸性などの成立条件を導出した。結果は以下の通りである。

単調性

u が単調であれば v も単調である。ただし、 u が単調であるとは次式が成立していることである。

$$u(S) \geq u(T), (\forall T \subset S) \quad (7)$$

優加法性

u が優加法性を満たせば v も優加法性を満たす。ここに、 u が優加法性を満たすとは次式が成立することである。

$$u(S \cup T) \geq u(S) + u(T) (\forall T \subset S, S \cap T = \emptyset) \quad (8)$$

凸性

u が単調かつ凸性を満たす場合、 v にも凸性が

表1 更新費用，運転費用，推移確率

劣化	更新	運転	劣化	0	1	2
----	----	----	----	---	---	---

状態	費用	費用
0	8	1
1	8	3
2	8	7

状態			
0	0.7	0.3	0
1	0	0.6	0.4
2	0	0	1

表2 共同更新および個別での更新をした場合の総割引期待費用の結果

劣化状態			共同更新			個別での更新		
A	B	C	A	B	C	A	B	C
1	1	1	21.1	21.1	21.1	30.2	30.2	30.2
2	2	1	21.5	21.5	20.3	30.3	30.3	30.2
2	2	2	21.1	21.8	21.1	30.3	30.3	30.3

成立する。ここに、 u が凸性を満たすとは次式が成立することである。

$$u(S \cup T) + u(S \cap T) \geq u(S) + u(T) (\forall T \subset S) \quad (9)$$

4. 数値例

三人の主体 A,B,C が共同更新する場面を想定し、数値計算を行った。その際、これらの主体はすべて同質であるとした。要素の劣化状態を3区分、すなわち、 $i_n=0,1,2$ の3状態とし、更新費用および運転費用、推移確率については表1のように与え、 $\beta=0.96$ とした。共同更新した際の節約額を $u(A,B)=u(B,C)=u(A,C)=2$, $u(A,B,C)=8$ であるとした。費用配分手法としてシャープレイ値を用いた。

その結果、任意の劣化状態において、主体が個別で更新するより共同更新した場合に費用を節減する結果が得られた。表2に共同更新を行った場合と個別で更新を行った場合の各主体の総割引期待費用の一例を示す。例えば、主体 A,B,C の劣化状態が(1,1,1)であるとき、要素を共同更新することでそれぞれの主体は 9.1 の費用を節約している。

5. おわりに

共同更新に関する費用配分メカニズムを検討した。その結果、費用配分のゲームは更新費用の節約額の関数 u で特徴づけられることが分かった。また、数値例を用いて、本研究で検討した費用配分メカニズムが主体にとって費用の削減をもたらしていることを確認した。

1)R.Dekker,R.E.Wildman,R.van Egmond: Joint replacement in an operational planning phase, European Journal of Operational Research, Vol.91, pp74-126, 1996