提携行動と状態変化の相互作用に着目した提携形成問題

システム計画学研究室　石本裕亮

１．はじめに

我々が直面する様々な社会問題を解決するに当たって, 主体間の提携が不可欠となっている. 提携の形成に際しては主体間に利害対立が生じる. その調整には利害対立の構造とその下での提携形成メカニズムについての理解が必要となる. この分析は従来「提携形成問題」として行われてきたが, そこでは, 主体の行動が主体をとりまく状態が利得や費用に影響を及ぼすと暗に仮定され, その影響を与件として提携形成行動をモデル化している. しかし, 主体の行動も状態に影響を与えており, 主体の行動と状態の間には相互依存の関係がある.

本研究では, この関係を想定した「提携形成問題」を二人確率ゲームを用いてモデル化するとともに, 利得構造が提携形成行動に及ぼす影響について分析する.

２．モデル分析

2.1　二人確率ゲーム

プレイヤー（主体）の集合を $N=\{1,2\}$で表し, 任意のプレイヤーを $i(\in N)$で表す. 二人確率ゲームは要素$\{S,\Theta_1, \Theta_2,q,\pi_1,\pi_2,\beta\}$で定義される. ゲームは無限回繰り返され, その過程においていくつかの異なる状態 $s(\in S)$が生起する.

プレイヤーが行動を選択することにより次の二点が起こる. まず, プレイヤーi は形成された提携の下で事業を行い, それにより瞬間の利得（instantaneous payoff）$\pi_i(s,\theta_1,\theta_2)$を得る. ただし, $\theta_i(\in\Theta_i)$はプレイヤーi の行動である. 次いで, 確率過程 $q(\cdot\,|\,s,\theta_1,\theta_2)$に従って次期の状態 s'へと推移する. 推移確率は今期の状態とゲームの結果, つまりプレイヤーの行動の組の条件付確率で与えられる. これらのプロセスが無限回続くため, プレイヤーは瞬間の利得ではなく, 総期待割引利得を最大化する.

以下では, 状態が二つ $S=\{1,2\}$であるゲームを対象にする. プレイヤーは形成された提携の下である事業を実施することで利得を得る. プレイヤーが利用可能な事業の方式（以後, 「方式」と呼ぶ）の集合を $K=\{X,Y\}$とする. プレイヤーの行動は「方式 X で相手と提携を形成する（X）」, 「方式 Y で相手と提携を形成する（Y）」のいずれかを表明することとする. すなわち, $\Theta_i=K(\forall i\in N)$である. プレイヤーが同じ方式 $k(\in K)$を選択したとき方式 k の下で提携が形成され, 異なる場合, 単独提携が形成される. 状態sの下でのゲームにおいて方式Xで提携が形成された場合にプレイヤー1 が得られる瞬間の利得を a_s, 方式 Y で提携が形成された場合のそれを c_s, 単独提携が形成された場合のそれを b_sとする. $p_{ss'},q_{ss'},r_{ss'}$は状態の推移確率である. また $g_1(s)$は初期の状態が s のときにプレイヤー1 がゲームを無限回プレイすることによって得る期待利得である. すると, ゲームの標準形表現は表１のようになる.

表１　状態 S の下でのゲームの利得行列
（プレイヤー１の利得のみを示している）

プレイヤー1 ＼ プレイヤー2	X	Y
X	$a_s+\sum_{s'=1}^{2} q_{ss'}\cdot g_1(s')$	$b_s+\sum_{s'=1}^{2} p_{ss'}\cdot g_1(s')$
Y	$b_s+\sum_{s'=1}^{2} p_{ss'}\cdot g_1(s')$	$c_s+\sum_{s'=1}^{2} r_{ss'}\cdot g_1(s')$

2.2　ナッシュ均衡解

各プレイヤーの戦略は, 各状態での各行動に割り当てる確率であるとする. 初期の状態が s と観測され, プレイヤーの選択する戦略の組が$(\Sigma_1,\ \Sigma_2)$であるときの t 期におけるプレイヤーi の期待利得を$\pi_{it}(\Sigma_1, \Sigma_2)(s)$で表す.

初期の状態が s と観測され, その後無限回繰り返す過程において得られるプレイヤーi の総期待割引利得 I_i は次式で表される. ただし, $\beta(0<\beta<1)$は割引因子である.

$$I_i(\Sigma_1,\Sigma_2)(s)=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\pi_{it}(\Sigma_1,\Sigma_2)(s) \qquad (2.1)$$

総期待割引利得が次式を満たす場合, プレイ

ヤー1 の戦略Σ_1^*は最適応答である．

$$I_1(\Sigma_1^*, \Sigma_2)(s) \geq I_1(\Sigma_1, \Sigma_2)(s) \quad (\forall \Sigma_1, \forall s \in S) \tag{2.2}$$

全てのプレイヤーの戦略が他のプレイヤーの戦略の組に対する最適応答であるとき, 最適戦略の組をナッシュ均衡解という．

2.3　最適応答の条件の導出

状態 1，2 の下であるプレイヤーの行動がそれぞれ k_1，k_2 であることをベクトル（k_1，k_2）で表す. ここでプレイヤーが純粋戦略をとると仮定し, s＝1 においてプレイヤー2 の戦略が（X, X）であるとの条件の下で，プレイヤー1 の戦略（X, X）が最適応答となるための条件を表 2 に整理した. 表 2 の条件式 1 はプレイヤー1 が戦略（X，X）をとった場合に得られる総期待割引利得が戦略（Y，X）とった場合に得られる総期待割引利得を上回っていることを示している．条件 2 は戦略（X，Y）をとった場合，条件式 3 は戦略（Y，Y）をとった場合に得られる総期待割引利得との大小関係を示している. 状態 2 における条件式やその他の戦略の組についても同様に条件を求めることができる．

2.4　利得構造と提携構造

表 2 を用いて瞬間の利得（a_s，b_s，c_s）の変化がプレイヤーの最適応答の条件式に与える影響について検討する．瞬間の利得の変化が「プレイヤー2 の戦略が（X，X）であるとの条件の下で，プレイヤー1 の戦略（X，X）が最適反応となる条件」に与える影響を表 3 に整理した．ここでは紙面の都合上，a_1,b_1,c_1 が増加するときについてのみ示した. 表 3 より, 当該の戦略（X，X）が最適反応となる条件式の成立範囲が拡大するか縮小するかは推移確率に成立する条件によって異なることが分かった. この結果は，a_1 が増加すると状態 s＝1 の下で方式 X を表明する動機が一見高まりそうであるが, その推測が必ずしも適当でないことを表している．

3.　数値シミュレーション

表 4 は状態 s＝1 の利得構造がコーディネーションゲーム（複数均衡をもつゲーム）から，ジャンケンゲーム（純粋戦略下で均衡解のないゲーム）と変化していく上で均衡解が変化していることを表している．この表は，瞬間の利得構造のみが与えられたときの均衡解と無限繰り返し確率ゲームにおいて実現するそれが異なることを示している

4.　今後の課題

状態やプレイヤーの行動の数に関する一般化が今後の課題である．

表 2　（X，X）が最適応答であるための条件式

初期の状態が S＝1のとき	条件式1	$\left[1+\frac{1}{D_4}[r_{11}\cdot(1-r_{22})+r_{12}\cdot r_{21}]\right]\cdot c_1+\frac{1}{D_4}\cdot r_{12}\cdot c_2$ $\geq \left[1+\frac{1}{D_1}[p_{11}\cdot(1-p_{22})+p_{12}\cdot p_{21}]\right]\cdot b_1+\frac{1}{D_1}\cdot p$
	条件式2	$\left[1+\frac{1}{D_4}[r_{11}\cdot(1-r_{22})+r_{12}\cdot r_{21}]\right]\cdot c_1+\frac{1}{D_4}\cdot r_{12}\cdot c_2$ $\geq \frac{1}{D_2}\cdot r_{12}\cdot b_2+\left[1+\frac{1}{D_2}[(1-p_{22})\cdot r_{11}+p_{21}\cdot r_{12}\right.$
	条件式3	$\left[1+\frac{1}{D_4}[r_{11}\cdot(1-r_{22})+r_{12}\cdot r_{21}]\right]\cdot c_1+\frac{1}{D_4}\cdot r_{12}\cdot c_2$ $\geq \left[1+\frac{1}{D_3}[p_{11}\cdot(1-r_{22})+p_{12}\cdot r_{21}]\right]\cdot b_1+\frac{1}{D_3}\cdot p$
参照		$D_1=(1-p_{11})(1-p_{22})-p_{12}\cdot p_{21}$
		$D_2=(1-r_{11})(1-p_{22})-r_{12}\cdot p_{21}$
		$D_3=(1-p_{11})(1-r_{22})-p_{12}\cdot r_{21}$
		$D_4=(1-r_{11})(1-r_{22})-r_{12}\cdot r_{21}$

表 3　最適応答であるための条件式と瞬間の利得の関係

	初期の状態がS＝1のとき			初期の状態がS＝2のとき		
	条件式1	条件式2	条件式3	条件式1	条件式2	条件式3
a_1の増加による条件式の成立範囲	拡大	$q_{22}<p_{22}$ 拡大 $q_{22}>p_{22}$ 縮小	拡大	拡大	$D_2q_{21}>D_1p_{21}$ 拡大 $D_2q_{21}<D_1p_{21}$ 縮小	拡大
b_1の増加による条件式の成立範囲	縮小	影響なし	縮小	縮小	影響なし	縮小
c_1の増加による条件式の成立範囲	影響なし	影響なし	影響なし	影響なし	影響なし	影響なし

表 4　数値例 1

状態s=1のゲームの構造		コーディネーションゲーム						ジャンケンゲーム	
(p_1,q_1,p_2,q_2) ＼ Δ		0.0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8
純粋戦略	(1,1,1,1)	○	○	×	×	×	×	×	×
	(0,0,1,1)	○	○	○	○	○	○	×	×
混合戦略	$\begin{pmatrix}p_1\\q_1\\p_2\\q_2\end{pmatrix}$	0.40 0.70 1.00 1.00	0.40 0.83 1.00 1.00		0.00 0.00 1.00 1.00	0.00 0.00 1.00 1.00	0.00 0.00 1.00 1.00	0.40 0.17 1.00 1.00	0.40 0.25 1.00 1.00

数値シミュレーションで用いるゲーム

プレイヤー2

プレイヤー1		X	Y
	X	$1-\Delta+0.72g_1(1)+0.18g_1(1)$ $2+0.72g_2(1)+0.18g_2(1)$	$0.45g_1(1)+0.45g_1(1$ $0.45g_2(1)+0.45g_2(1$
	Y	$0.45g_1(1)+0.45g_1(1)$ $0.45g_2(1)+0.45g_2(1)$	$2-\Delta+0.45g_1(1)+0.45g_1(1$ $1+0.45g_2(1)+0.45g_2(1$

プレイヤー2

プレイヤー1		X	Y
	X	$1+0.18g_1(2)+0.72g_1(2)$ $2+0.18g_2(2)+0.72g_2(2)$	$0.45g_1(2)+0.45g_1(2$ $0.45g_2(2)+0.45g_2(2$
	Y	$0.45g_1(2)+0.45g_1(2)$ $0.45g_2(2)+0.45g_2(2)$	$-1+0.45g_1(2)+0.45g_1(2$ $1+0.45g_2(2)+0.45g_2(2$