

ガスパイプラインの最適な階層システム

宮川 雅至 (山梨大学)

1 はじめに

石油に代わるエネルギー源として、天然ガスと水素が注目されている。欧州にはすでに総延長 140 万 km に及ぶ天然ガスパイプライン網が存在する。日本にも、サハリンと東シベリアで取り出される天然ガスを日本の国土を縦断するパイプラインによって輸送する、という国土幹線ガスパイプライン構想がある (三菱総合研究所 [3])。将来の水素輸送に関しても、大量輸送にはこれらパイプラインの利用が効率的であることが示されている (Yang and Ogden [5])。本研究では、将来の天然ガス・水素エネルギー社会の実現に資することを目的に、ガスパイプラインの最適な階層システムを明らかにする。

パイプラインのネットワークデザインに関する研究として、Rothfarb et al. [4] はガスの収集ネットワークについて、ガス田の位置とガスの流量が与えられたときに、費用を最小にするネットワーク構造を求めている。Bhaskaran and Salzborn [1] は異なるタイプのパイプを繋ぐジャンクションの数と位置について分析している。Wolf and Smeers [2] は与えられたネットワークに対して、費用を最小にするパイプの直径を求めるアルゴリズムを提案している。

これらの研究は、実際のネットワークに適用可能なアルゴリズムを開発することに主眼を置いている。これに対して本研究は、解析的アプローチを採用することによって、本質的な結果の方向を与えることを目的とする。そのために、単純な線分都市のモデルを構築し、建設費用を最小にする階層システム、およびガス会社の利潤を最大にする階層システムを解析的に求める。

2 線分都市のガスパイプライン

長さ ℓ の線分都市を考える。都市内の地点 x におけるガスの需要量 $g(x)$ が図 1 のように与えられ、ガスは都市の左端の原点 O からパイプラインを通じて都市内に供給されるものとする。各地点ではその地点を流れるガスの量に見合うだけのパイプライン容量が必要となる。地点 x を通過するガスの断面流量 $G(x)$ は、 x より右側にある地点の需要量の総和に等しく、

$$G(x) = \int_x^\ell g(x) dx \quad (1)$$

と表される。

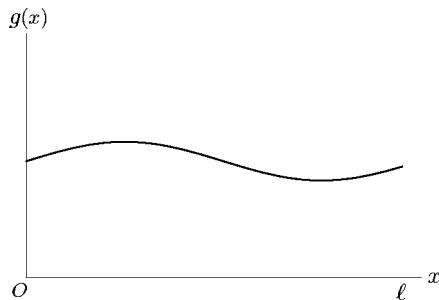


図 1: 需要分布

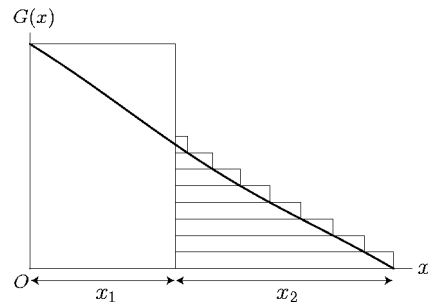


図 2: パイプラインの階層システム

ガスパイプラインは地域幹線と供給ラインの2種類に分類されているものとする。都市内で地域幹線と供給ラインを建設する領域の長さをそれぞれ x_1, x_2 とおく (図2)。ここでは、地域幹線の容量は十分大きく、供給ラインの容量は十分小さいと仮定している。したがって、地域幹線は1本あれば十分であり、供給ラインは断面流量に比例した本数が必要となる。ここでの目的は、最適な x_1, x_2 を求めることである。

3 建設費用を最小にする階層システム

まず、パイプラインの建設費用を最小にする階層システムを求めよう。地域幹線と供給ラインの単位長さ当たりの建設費用をそれぞれ k_1, k_2 とする。供給ラインの総延長を図2の $G(x)$ より下の部分の面積を用いて近似的に表すことにすると、建設費用 C を最小にする x_1, x_2 を求める問題は、次のように定式化できる：

$$\left\{ \begin{array}{l} \min. \quad C = k_1 x_1 + k_2 \int_{x_1}^{x_1+x_2} G(x) dx \\ \text{s. t.} \quad x_1 + x_2 = \ell, \\ \quad \quad x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

最初の制約は、ガスを都市全体に供給しなければならないことを表している。

例1：一様な需要分布

計算例として、ガスの需要が都市内で一様な場合を考える。すなわち、地点 x における需要分布 $g(x)$ と断面流量 $G(x)$ が

$$g(x) = q, \quad G(x) = q(\ell - x) \quad (3)$$

と与えられるものとする (図3, 4)。

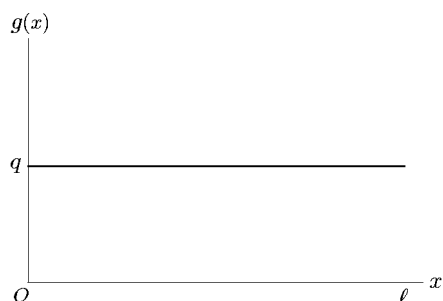


図3: 需要分布

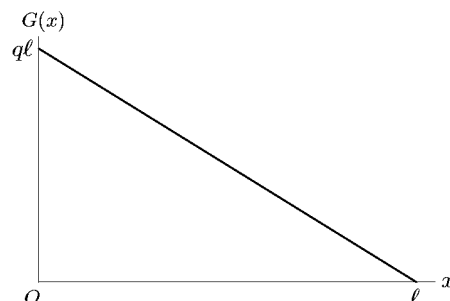


図4: 断面流量

このとき、建設費用 C は

$$C = k_1 x_1 + \frac{1}{2} k_2 q x_2^2 \quad (4)$$

と表される。これを式(2)に代入して解くと、最適な x_1^*, x_2^* 、および建設費用 C^* が

$$\begin{aligned} \text{(i) } q \leq \frac{k_1}{k_2 \ell} \text{ のとき} \\ (x_1^*, x_2^*) = (0, \ell), \quad C^* = \frac{1}{2} k_2 q \ell^2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) } q > \frac{k_1}{k_2 \ell} \text{ のとき} \\ (x_1^*, x_2^*) = \left(\ell - \frac{k_1}{k_2 q}, \frac{k_1}{k_2 q} \right), \quad C^* = k_1 \ell - \frac{k_1^2}{2k_2 q} \end{aligned} \quad (6)$$

と求まる. (i) は供給ラインのみを用いる場合, (ii) は地域幹線と供給ラインの両方を用いる場合に対応する (図 5).

最適なパイプライン延長をガス需要 q の関数として示したのが図 6 である. これより, q がある程度大きい場合には, パイプラインに階層構造を持たせることが有効であること, そして, q が大きくなるほど, 地域幹線の延長 x_1^* が増加することも分かる.

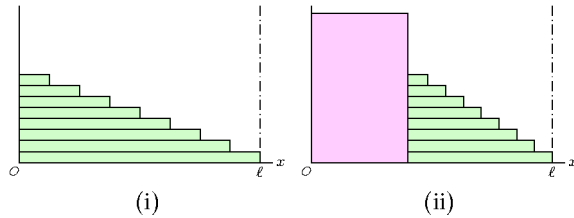


図 5: 最適な階層システム

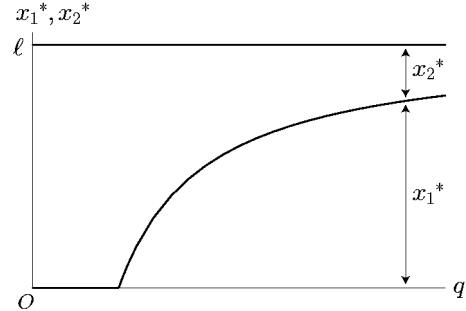


図 6: 最適なパイプライン延長

例 2 : 階段状の需要分布

次の計算例として, 階段状の需要分布を考える. すなわち, 地点 x における需要分布 $g(x)$ と断面流量 $G(x)$ が

$$g(x) = \begin{cases} q_1 & (0 \leq x \leq l_1) \\ q_2 & (l_1 < x \leq l_1 + l_2) \end{cases}, \quad G(x) = \begin{cases} q_1(l_1 - x) + q_2 l_2 & (0 \leq x \leq l_1) \\ q_2(l_1 + l_2 - x) & (l_1 < x \leq l_1 + l_2) \end{cases} \quad (7)$$

と与えられるものとする (図 7, 8). ただし, $q_1 \geq q_2$ と仮定する. 以下では, $0 \leq x \leq l_1$ を都市 1, $l_1 < x \leq l_1 + l_2$ を都市 2 と呼ぶ.

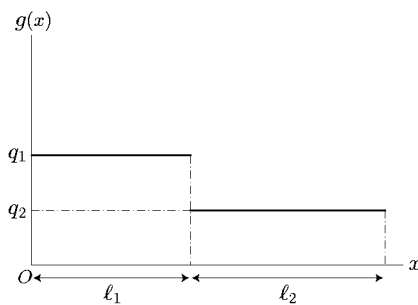


図 7: 需要分布

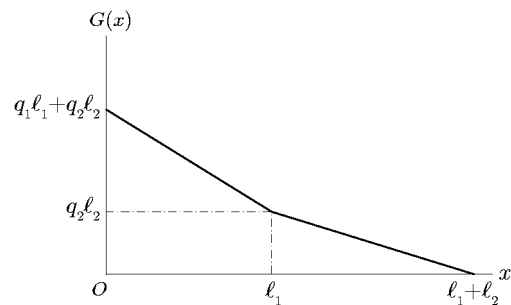


図 8: 断面流量

このとき, 建設費用 C は

$$C = \begin{cases} k_1 x_1 + \frac{k_2}{2} \{ (q_1 - q_2)(l_1 - x_1)^2 + q_2 x_2^2 \} & (x_1 \leq l_1) \\ k_1 x_1 + \frac{1}{2} k_2 q_2 x_2^2 & (x_1 > l_1) \end{cases} \quad (8)$$

と表される. これを式 (2) に代入して解くと, 最適な x_1^*, x_2^* , および建設費用 C^* が

$$(i) \quad q_1 l_1 + q_2 l_2 \leq \frac{k_1}{k_2} \quad \text{のとき} \\ (x_1^*, x_2^*) = (0, l_1 + l_2), \quad C^* = \frac{k_2}{2} (q_1 l_1^2 + q_2 l_2^2 + 2q_2 l_1 l_2) \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
& \text{(ii) } q_1 \ell_1 + q_2 \ell_2 > \frac{k_1}{k_2}, q_2 \leq \frac{k_1}{k_2 \ell_2} \text{ のとき} \\
& (x_1^*, x_2^*) = \left(\ell_1 + \frac{q_2 \ell_2}{q_1} - \frac{k_1}{k_2 q_1}, \ell_2 - \frac{q_2 \ell_2}{q_1} + \frac{k_1}{k_2 q_1} \right), \\
& C^* = k_1 \ell_1 + \frac{k_2 q_2}{2 q_1} (q_1 - q_2) \ell_2^2 + \frac{k_1 q_2 \ell_2}{q_1} - \frac{k_1^2}{2 k_2 q_1}
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
& \text{(iii) } q_2 > \frac{k_1}{k_2 \ell_2} \text{ のとき} \\
& (x_1^*, x_2^*) = \left(\ell_1 + \ell_2 - \frac{k_1}{k_2 q_2}, \frac{k_1}{k_2 q_2} \right), \quad C^* = k_1 (\ell_1 + \ell_2) - \frac{k_1^2}{2 k_2 q_2}
\end{aligned} \tag{11}$$

と求まる。(i)は供給ラインのみを用いる場合、(ii)、(iii)は地域幹線と供給ラインの両方を用いる場合に対応する。(ii)では地域幹線が都市1までなのに対し、(iii)では地域幹線が都市2まで延びている。最適解を図示すると図9のようになる。横軸が都市1の需要 q_1 、縦軸が都市2の需要 q_2 である。ここでは $q_1 \geq q_2$ を仮定しているの、下側の三角形の領域を考えればよい。 q_1 と q_2 の両方とも小さい場合には、(i)となって供給ラインのみを用いること、そして、ガス需要が大きくなるにつれて、(ii)、(iii)となり地域幹線の延長が長くなることが分かる。

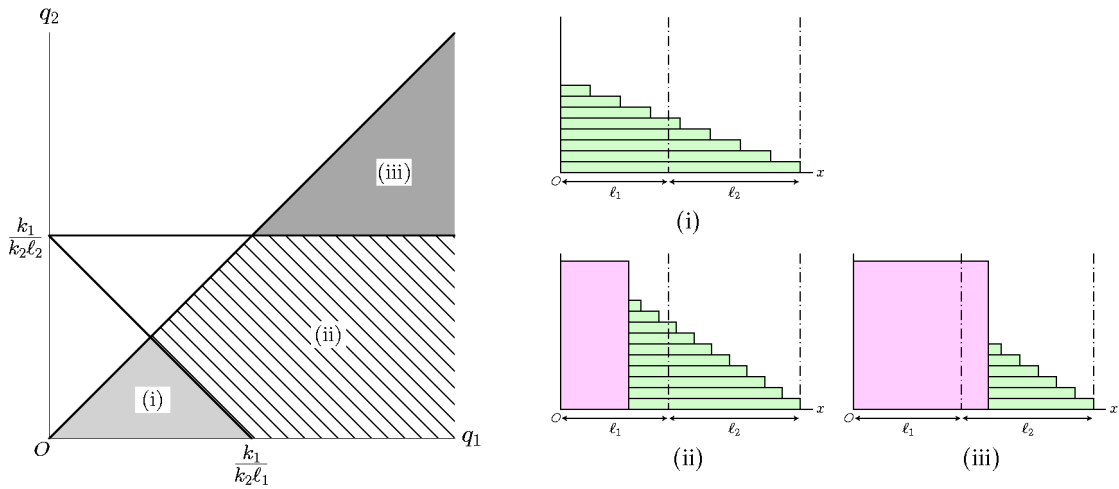


図 9: 最適な階層システム

最適なパイプライン延長をガス需要 q の関数として示したのが図10である。ただし、都市1と都市2の長さ、および需要をそれぞれ $l_1 = l_2 = l/2$ 、 $q_1 = q, q_2 = q/2$ とした。図6と比較すると、地域幹線の延長 x_1^* が短くなっていることが分かる。

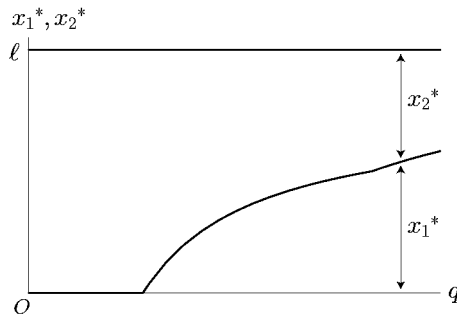


図 10: 最適なパイプライン延長

4 利潤を最大にする階層システム

次に、ガス会社の利潤を最大にするパイプラインの階層システムを求めよう。ガスの価格は p で一定とし、価格にガスの総供給量を乗じたものを収入とする。そして、収入からパイプラインの建設費用を差し引いたものを利潤と定義する。ガスの総供給量は断面流量 $G(x)$ を用いて $G(0)$ と表せるから、利潤 Π を最大にする x_1, x_2 を求める問題は、次のように定式化できる：

$$\begin{cases} \max. & \Pi = pG(0) - k_1x_1 - k_2 \int_{x_1}^{x_1+x_2} G(x) dx \\ \text{s. t.} & x_1 + x_2 \leq \ell, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (12)$$

最初の制約は、必ずしも都市全体にガスを供給する必要はないことを表している。

例 1：一様な需要分布

一様な需要分布 (3) の下での利潤 Π は

$$\Pi = pq(x_1 + x_2) - k_1x_1 - \frac{1}{2}k_2qx_2^2 \quad (13)$$

と表される。これを式 (12) に代入して解くと、最適な x_1^*, x_2^* 、および利潤 Π^* が

(i) $pq < k_1, p \leq k_2\ell$ のとき

$$(x_1^*, x_2^*) = \left(0, \frac{p}{k_2}\right), \quad \Pi^* = \frac{p^2q}{2k_2} \quad (14)$$

(ii) $pq = k_1, q > \frac{k_1}{k_2\ell}$ のとき

$$(x_1^*, x_2^*) = \left(0 \leq x_1^* \leq \ell - x_2^*, \frac{p}{k_2}\right), \quad \Pi^* = \frac{p^2q}{2k_2} \quad (15)$$

(iii) $p > k_2\ell, q \leq \frac{k_1}{k_2\ell}$ のとき

$$(x_1^*, x_2^*) = (0, \ell), \quad \Pi^* = pq\ell - \frac{1}{2}k_2q\ell^2 \quad (16)$$

(iv) $pq > k_1, q > \frac{k_1}{k_2\ell}$ のとき

$$(x_1^*, x_2^*) = \left(\ell - \frac{k_1}{k_2q}, \frac{k_1}{k_2q}\right), \quad \Pi^* = pq\ell - k_1\ell + \frac{k_1^2}{2k_2q} \quad (17)$$

と求まる。(i) は都市の一部に供給ラインのみを使って供給する場合、(ii) は都市の一部に地域幹線と供給ラインを使って供給する場合、(iii) は都市全体に供給ラインのみを使って供給する場合、(iv) は都市全体に地域幹線と供給ラインを使って供給する場合に対応する。最適解を図示すると図 11 のようになる。縦軸がガスの価格 p 、横軸がガスの需要 q である。まず、 p が小さい場合には、たとえ q が大きくても (i) となって供給されない地域が出てくること、逆に、 p がある程度大きい場合には、(iii), (iv) となって都市全体にガスを供給することが分かる。また、 p も q も大きい場合に、(ii), (iv) となってパイプラインに階層構造が生じることが見て取れる。

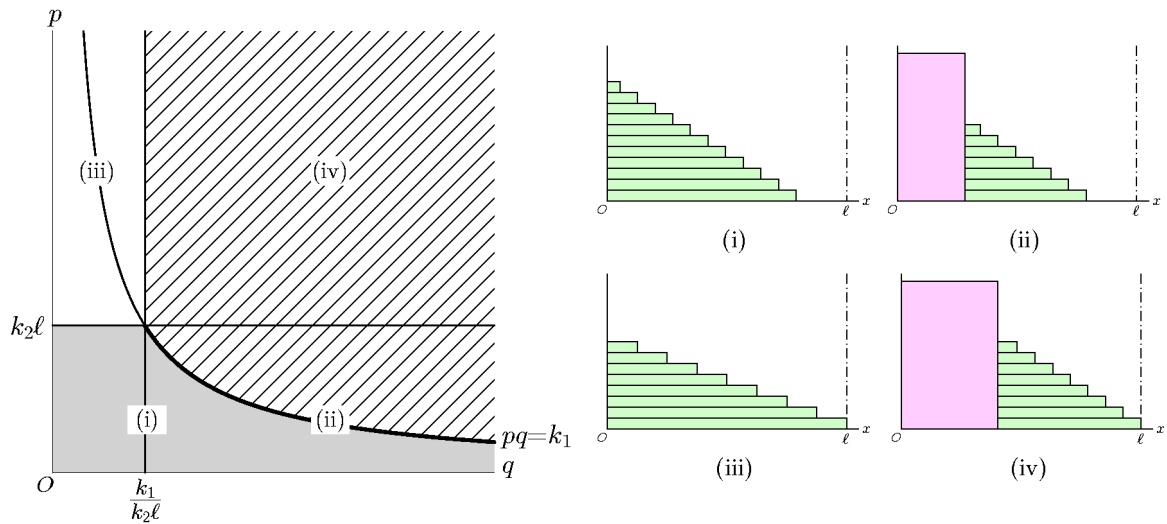


図 11: 最適な階層システム

最適なパイプライン延長をガス需要 q 、およびガス価格 p の関数として示したのが図 12 である。 q や p が小さいときには、供給ラインのみを使い、しかも都市の一部にしかガスが供給されないことが確認できる。また、地域幹線の延長 x_1^* は q の増加に対しては常に増加するが、 p の増加に対しては途中から一定になることが分かる。

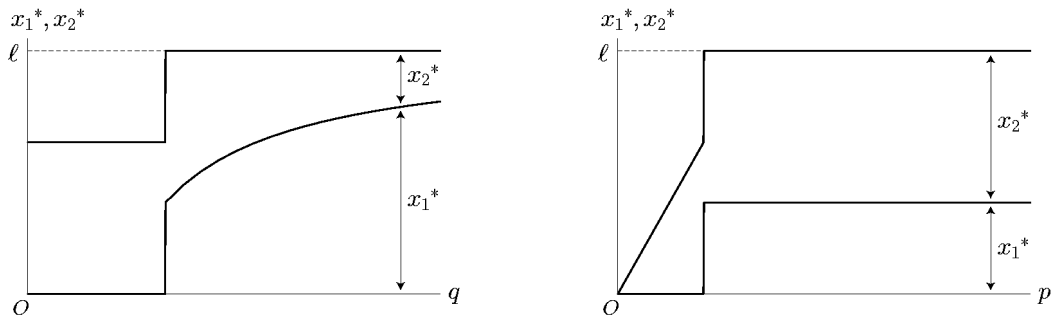


図 12: 最適なパイプライン延長

例 2：階段状の需要分布

階段状の需要分布 (7) の下での利潤 Π は

$$\Pi = \begin{cases} pq_1(x_1 + x_2) - k_1x_1 - \frac{1}{2}k_2q_1x_2^2 & (x_1 + x_2 \leq \ell_1) \\ pq_1\ell_1 + pq_2(x_1 + x_2 - \ell_1) - k_1x_1 \\ \quad - \frac{k_2}{2}\{(q_1 - q_2)(\ell_1 - x_1)^2 + q_2x_2^2\} & (x_1 + x_2 > \ell_1, x_1 \leq \ell_1) \\ pq_1\ell_1 + pq_2(x_1 + x_2 - \ell_1) - k_1x_1 - \frac{1}{2}k_2q_2x_2^2 & (x_1 + x_2 > \ell_1, x_1 > \ell_1) \end{cases} \quad (18)$$

と表される。これを式 (12) に代入して解くと、最適な x_1^*, x_2^* 、および利潤 Π^* が

(i) $pq_1 < k_1, p \leq k_2\ell_1$ のとき

$$(x_1^*, x_2^*) = \left(0, \frac{p}{k_2}\right), \quad \Pi^* = \frac{p^2q_1}{2k_2} \quad (19)$$

(ii) $pq_1 = k_1, q_1 > \frac{k_1}{k_2\ell_1}$ のとき

$$(x_1^*, x_2^*) = \left(0 \leq x_1^* \leq \ell_1 - x_2^*, \frac{p}{k_2}\right), \quad \Pi^* = \frac{p^2q_1}{2k_2} \quad (20)$$

(iii) $p \geq k_2\ell_1, p \leq k_2(\ell_1 + \ell_2), pq_2 \leq k_1 - k_2(q_1 - q_2)\ell_1$ のとき

$$(x_1^*, x_2^*) = \left(0, \frac{p}{k_2}\right), \quad \Pi^* = p(q_1 - q_2)\ell_1 + \frac{p^2q_2}{2k_2} - \frac{k_2}{2}(q_1 - q_2)\ell_1^2 \quad (21)$$

(iv) $pq_1 > k_1, pq_1 \leq k_1 + k_2(q_1 - q_2)\ell_2, pq_2 > k_1 - k_2(q_1 - q_2)\ell_1, pq_2 < k_1$ のとき

$$(x_1^*, x_2^*) = \left(\ell_1 - \frac{k_1 - pq_2}{k_2(q_1 - q_2)}, \frac{p}{k_2}\right), \quad (22)$$

$$\Pi^* = pq_1\ell_1 - k_1\ell_1 + \frac{1}{2k_2(q_1 - q_2)}(k_1^2 + p^2q_1q_2 - 2k_1pq_2)$$

(v) $pq_2 = k_1, q_2 \geq \frac{k_1}{k_2\ell_2}$ のとき

$$(x_1^*, x_2^*) = \left(\ell_1 \leq x_1^* \leq \ell_1 + \ell_2 - x_2^*, \frac{p}{k_2}\right), \quad \Pi^* = pq_1\ell_1 - k_1\ell_1 + \frac{p^2q_2}{2k_2} \quad (23)$$

(vi) $p > k_2(\ell_1 + \ell_2), q_1\ell_1 + q_2\ell_2 \leq \frac{k_1}{k_2}$ のとき

$$(x_1^*, x_2^*) = (0, \ell_1 + \ell_2), \quad \Pi^* = p(q_1\ell_1 + q_2\ell_2) - \frac{k_2}{2}(q_1\ell_1^2 + q_2\ell_2^2 + 2q_2\ell_1\ell_2) \quad (24)$$

(vii) $pq_1 > k_1 + k_2(q_1 - q_2)\ell_2, q_1\ell_1 + q_2\ell_2 > \frac{k_1}{k_2}, q_2 \leq \frac{k_1}{k_2\ell_2}$ のとき

$$(x_1^*, x_2^*) = \left(\ell_1 + \frac{q_2\ell_2}{q_1} - \frac{k_1}{k_2q_1}, \ell_2 - \frac{q_2\ell_2}{q_1} + \frac{k_1}{k_2q_1}\right), \quad (25)$$

$$\Pi^* = p(q_1\ell_1 + q_2\ell_2) - k_1\ell_1 - \frac{k_2q_2}{2q_1}(q_1 - q_2)\ell_2^2 - \frac{k_1q_2\ell_2}{q_1} + \frac{k_1^2}{2k_2q_1}$$

(viii) $pq_2 > k_1, q_2 > \frac{k_1}{k_2\ell_2}$ のとき

$$(x_1^*, x_2^*) = \left(\ell_1 + \ell_2 - \frac{k_1}{k_2q_2}, \frac{k_1}{k_2q_2}\right), \quad \Pi^* = p(q_1\ell_1 + q_2\ell_2) - k_1(\ell_1 + \ell_2) + \frac{k_1^2}{2k_2q_2} \quad (26)$$

と求まる。(i), (ii) は都市 1 の一部に供給する場合であり、(i) が供給ラインのみ、(ii) が地域幹線と供給ラインの両方を用いる場合に対応する。(iii), (iv), (v) は都市 1 の全体と都市 2 の一部に供給する場合であり、(iii) が供給ラインのみ、(iv), (v) が地域幹線と供給ラインの両方を用いる場合に対応する。(iv) では地域幹線が都市 1 までなのに対し、(v) では地域幹線が都市 2 まで延びている。(vi), (vii), (viii) は都市 1 と都市 2 の全体に供給する場合であり、(vi) が供給ラインのみ、(vii), (viii) が地域幹線と供給ラインの両方を

用いる場合に対応する。(vii)では地域幹線が都市1までなのに対し、(viii)では地域幹線が都市2まで延びている。最適解を図示すると図13のようになる。縦軸がガスの価格 p 、横軸がガス需要 q である。ただし、都市1と都市2の長さ、および需要をそれぞれ $l_1 = l_2 = l/2$, $q_1 = q, q_2 = q/2$ とした。 p が小さい場合には、(i), (ii) となって都市2にはガスが全く供給されないことが分かる。また、都市の一部が供給されずに取り残される(i)~(v)の領域は、需要が一樣な場合の図11(i), (ii)の領域と比べて、大きくなっていることが確認できる。

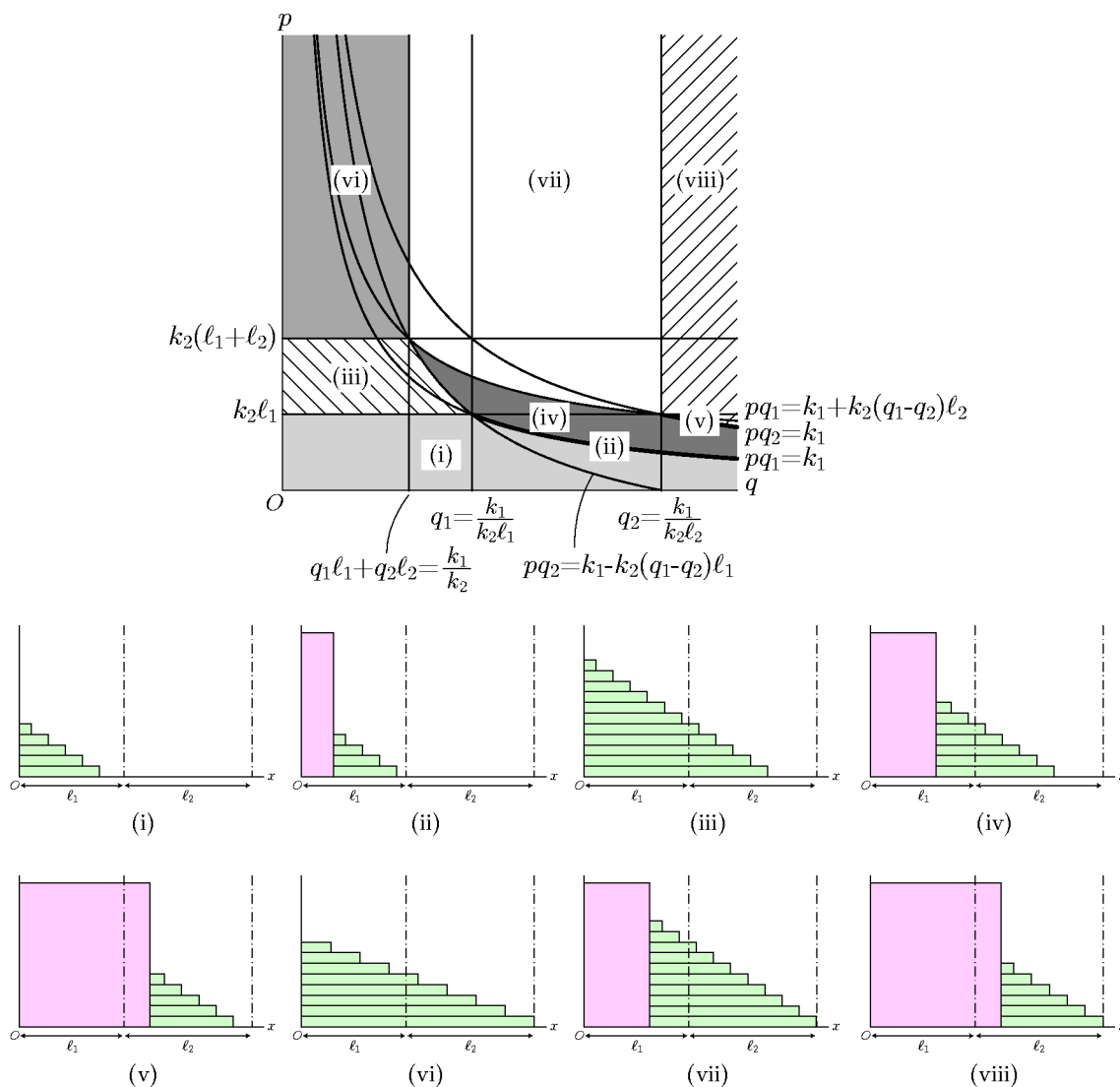


図 13: 最適な階層システム

最適なパイプライン延長をガス需要 q 、およびガス価格 p の関数として示したのが図 14 である。図 12 と比較すると、地域幹線の延長 x_1^* が短くなっていること、ガスが供給されない地域が大きくなっていることが分かる。

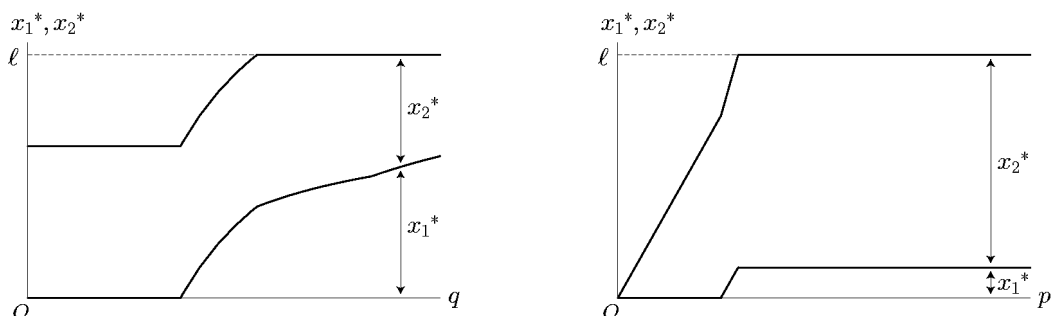


図 14: 最適なパイプライン延長

5 おわりに

本研究では、線分都市におけるガスパイプラインの最適な階層システムを、建設費用最小化、および利潤最大化という 2 つの観点から明らかにした。単純な線分都市での分析ではあるが、得られた結果は直観的に解釈できる。また、これをネットワークに基づく分析に発展させることも可能である。

得られた主たる知見は次の 2 点である。第一に、ガス需要が大きい場合には、パイプラインに階層構造を持たせることが、建設費用の最小化という観点から有効である。第二に、ガス価格が低い場合には、ガス会社の利潤最大化行動によってガスが供給されない地域が生じる。特に、ガス需要が供給源からの距離に従って減少する場合には、この傾向が顕著である。

参考文献

- [1] Bhaskaran, S. and Salzbom, F.J.M.: Optimal Design of Gas Pipeline Networks, *Journal of the Operational Research Society*, 30(12), 1047–1060, 1979.
- [2] De Wolf, D. and Smeers, Y.: Optimal dimensioning of pipe networks with application to gas transmission networks, *Operations Research*, 44(4), 596–608, 1996.
- [3] 三菱総合研究所天然ガスパイプライン事業部, 編: 国土幹線ガスパイプライン, 東洋経済新報社, 2000.
- [4] Rothfarb, B., Frank, H., Rosenbaum, D.M., Steiglitz, K., and Kleitman, D.J.: Optimal design of offshore natural-gas pipeline systems, *Operations Research*, 18(6), 992–1020, 1970.
- [5] Yang, C. and Ogden, J.: Determining the lowest-cost hydrogen delivery mode, *International Journal of Hydrogen Energy*, 32, 268–286, 2007.