ユーザの利用特性を考慮した故障を伴うシステムの失望時間に関する研究

経営システム研究室 水野賢次

1. はじめに

本研究では，故障を伴うシステムに対して，ユーザの間欠利用および利用特性を考慮した信頼度解析について議論する．システムを利用するユーザの視点に着目すると，システムを利用しているときにシステム故障が発生するか，あるいはシステムの修復中に利用要求が起こるときに，ユーザはシステム故障を認知することになる．そこで，ユーザが始めてシステムダウンを認知するまでの時間を失望時間と定義し，その平均時間を算出する．ユーザの使用/不使用状態およびシステムの動作/不動作状態の確率的振舞いは，マルコフ過程を用いて記述される．本研究で得られる解析結果より，システムを構成するユニットの故障/修復特性やユーザの振舞いが失望時間に与える影響を考察する．

2. モデルの設定・解析

システムは稼働・故障を繰り返すユニットによって構成され，ユニットが稼働しているときのみシステムは利用可能である．ユニット $i(i=1,2)$ の故障時間は任意の分布 $\alpha_i(t)$ に従うとし，修理時間はパラメータ η_i を持つ指数分布 $\beta_i(t)$ に従うとする．また，ユーザによるシステムの使用要求発生間隔 $F(t)$ はパラメータ λ を持つ指数分布に従うとし，その使用保持時間については，$G(t)$ の分布に従うとする．また，$F(t)$ の残存確率を $\bar{F}(t)$ とする．これらより時刻 t=0 でユーザがシステムを使用していないとき，時刻 t でもシステムを使用していない確率 $P(t)$ は

$$P(t) = \bar{F}(t) + F * G * P(t) \tag{1}$$

の再生方程式によって与えられ，

$$P(t) = \bar{F}(t) * (1 - F(t) * G(t))^{-1} \tag{2}$$

となる．ここで*は，スチルチェスたたこみこを表す．ただし $(1-A(t))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}[A(t)]^{n*}$ であり，$[A(t)]^{n*}$ は n 乗のたたみこみを表す．$[A(t)]^{0*}$ はステップ関数とする．

3. 1ユニットシステム

故障・修理のサイクルを繰り返す1つのユニットによって構成される1ユニットシステム（以下System1）を考える．ユニットが稼動をしているとき，システムは使用可能である．ユニットが故障をしたとき，システムダウンとなる．

時刻 t における状態を表す確率過程 $\{X_1(t), t \geq 0\}$ を導入し，1ユニットシステムの状態空間を以下のように定義する．

W: ユニットが稼動を始める．システムの使用は起きていない．

F': ユニットが修理中となり，システムダウンが起きる．システムの使用は起きていない．

F: ユーザがシステムを使用中にシステムダウンが起きるか，システムダウン中にユーザの使用要求が起きるか，どちらか早い方が起こる．

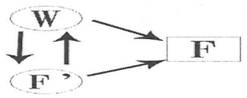

図 1: System1 におけるシグナルフローグラフ

図1に System1 のシグナルフローグラフを示す．これより，$Q_{jk}(s)$ を，状態 j から状態 k $(j,k \in (W,F',F))$ への1ステップ推移確率の LS 変換を表すものとする．状態 W から状態 F への初到達時間（すなわち System1 の失望時間）T_{S1} の分布に対する LS 変換 $\tilde{\Psi}_W(s)$ は，

$$\tilde{\Psi}_W(s) = \frac{\tilde{Q}_{WF}(s) + \tilde{Q}_{WF'}(s)\tilde{Q}_{F'F}(s)}{1 - \tilde{Q}_{WF'}(s)\tilde{Q}_{F'F}(s)} \tag{3}$$

で与えられ，その失望時間の平均および分散は

$$\mathrm{E}[T_{S1}] = -\left.\frac{d\tilde{\Psi}_W(s)}{ds}\right|_{s=0} \tag{4}$$

$$\mathrm{E}[T_{S1}^2] = \left.\frac{d^2\tilde{\Psi}_W(s)}{ds^2}\right|_{s=0} \tag{5}$$

$$\mathrm{Var}[T_{S1}] = \mathrm{E}[T_{S1}^2] - (\mathrm{E}[T_{S1}])^2 \tag{6}$$

で求めることができる．

4. 2ユニット待機冗長システム

次に，故障・修理のサイクルを繰り返す2ユニット待機冗長システム（以下System2）を考える．ユニットが稼動をしているとき，システムは使用可能である．System2 の動作規定を次のように定義する．1つのユニットが稼動しているとき，もう一方のユニットを待機させ，稼動しているユニットが故障すると，もう一方のユニットを稼動させ，故障したユニットの修理を始める．再び稼働中のユニットが故障をしたときに，他方のユニットの修理が終わっていれば再びユニットを稼動させ，システムを使用可能な状態に保持する．両ユニットが同時に修理中のとき，システムダウンとなる．

前節と同様に時刻 t における状態を表す確率過程 $\{X_2(t), t \geq 0\}$ を導入し，System2 の状態空間を以下のように定義する．

W: ユニット1が稼動を始め，ユニット2を待機させる．システムの使用は起きていない．

W_1: ユニット1が稼動を始め，ユニット2の修理を始める．システムの使用は起きていない．

W_2: ユニット2が稼動を始め，ユニット1の修理を始める．システムの使用は起きていない．

F': ユニット1,2の両方が修理中となり，システムダウンが起きる．システムの使用は起きていない．

F: ユーザがシステムを使用中にシステムダウンが起きるか，システムダウン中にユーザの使用要求が起きるか，どちらか早い方が起こる．

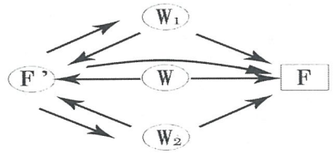

図 2: System2 におけるシグナルフローグラフ

図2は，System2 におけるシグナルフローグラフである．これより，$\pi_{jk}(s)$ を，状態 j から状態 k $(j,k \in (W,W_1,W_2,F',F))$ への1ステップ推移確率の LS 変換を表すものとする．状態 W から状態 F への初到達時間（すなわち System2 の失望時間）T_{S2} の分布に対する LS 変換 $\tilde{\Phi}_W(s)$ は，

$$\tilde{\Phi}_W(s) = \tilde{\pi}_{WF}(s) + \frac{\tilde{\pi}_{WF'}(s)\tilde{\pi}_{F'F}(s) + \tilde{\pi}_{WF'}(s)\tilde{\pi}_{F'W_1}(s)\tilde{\pi}_{W_1F}(s) + \tilde{\pi}_{WF'}(s)\tilde{\pi}_{F'W_2}(s)\tilde{\pi}_{W_2F}(s)}{1 - (\tilde{\pi}_{F'W_1}(s)\tilde{\pi}_{W_1F'}(s) + \tilde{\pi}_{F'W_2}(s)\tilde{\pi}_{W_2F'}(s))} \tag{7}$$

で与えられ，その失望時間の平均および分散は，

$$\mathrm{E}[T_{S2}] = -\left.\frac{d\tilde{\Phi}_W(s)}{ds}\right|_{s=0} \tag{8}$$

$$\mathrm{E}[T_{S2}^2] = \left.\frac{d^2\tilde{\Phi}_W(s)}{ds^2}\right|_{s=0} \tag{9}$$

$$\mathrm{Var}[T_{S2}] = \mathrm{E}[T_{S2}^2] - (\mathrm{E}[T_{S2}])^2 \tag{10}$$

で求めることができる．

5. 数値例および考察

この節では System1，System2 の数値例および考察を行う．まず初めにユニットの故障時間およびユーザの使用保持時間は，それぞれパラメータ $\omega_i(i=1,2)$ および μ を持つ指数分布に従うとする．このとき，$\lambda = j\lambda_0, \mu = j\mu_0 (j>0)$ と設定したときの，j と各システム構成の失望時間の平均および分散を表1に示す．

表 1: ユーザの利用特性と平均失望時間の関係
$(\omega_i = 0.1, \eta_i = 3\ (i=1,2)\ , \lambda_0 = 3, \mu_0 = 8)$

j	1.0	2.0	3.0	4.0
$\mathrm{E}[T_{S1}]$	15.93	13.31	12.29	11.76
$\mathrm{Var}[T_{S1}]$	250.35	175.24	149.86	137.22
$\mathrm{E}[T_{S2}]$	612.7	497.39	447.3	419.28
$\mathrm{Var}[T_{S2}]$	374892	247034	199760	175500

表1より，j の値が増加するほど，すなわちユーザがシステムを使用しようとする間隔が短くなる一方，システムを使用する時間がより短時間で終わるようになるほど，平均失望時間は小さく評価されることが示される．これは，ユーザがシステムを使用しているときにシステムダウンが起きるよりも，ユーザがシステムの使用を始めるときに，システム故障を認知する可能性の方が高くなるためであると考えられる．

次にユーザの使用保持時間の分布が，

$$G(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t} \tag{11}$$

とするパラメータ μ を持つアーラン分布に従うとする．このとき，$\mu = j\mu_0, n = jn_0 (j=1,2,\ldots)$ としたときの j と System1 および System2 の失望時間の平均および分散を表2に示す．

表 2: ユーザの使用保持時間と平均失望時間の関係
$(\omega_i = 0.1, \eta_i = 3\ (i=1,2)\ , \lambda = 3,$
$\mu_0 = 3,\ n_0 = 1)$

j	1.0	2.0	3.0	4.0
$\mathrm{E}[T_{S1}]$	13.52	13.50	13.49	13.49
$\mathrm{Var}[T_{S1}]$	179.8	179.67	179.62	179.60
$\mathrm{E}[T_{S2}]$	475.9	474.9	474.5	474.2
$\mathrm{Var}[T_{S2}]$	226196	225177	224785	224517

表2より，j の値が増加するほど平均失望時間は減少することが示される．このことから，ユーザがシステムを使用する平均時間が同じであっても，ユーザのシステム使用時間の分散が小さい，すなわち使用時間のばらつきが少ないほど平均失望時間が減少することが分かる．