マルコフ過程によるサービス信頼性評価法に関する研究

経営システム研究室　　赤尾　淳

1. はじめに

本研究では，システムが稼働することによって提供されるサービスの品質・信頼性の評価手法について議論する．すなわち，従来あまり取り扱われなかったサービス信頼性評価のための理論式の構築を試みる．サービス不具合の発生現象は, マルコフ過程により記述し，任意の時間区間でサービスの不具合が発生しない確率をサービス信頼度と定義して，本モデルよりこれを導出する．最後に，本モデルの有用性の考察を行う．

2. マルコフ過程によるモデルの設定・解析

マルコフ過程によるモデル化の際の仮定を，以下に挙げる．

A1. サービス障害について，発見されたとき，その障害の除去作業が実施されるが，それは確率 $a(0 < a \leq 1)$ で取り除くことに成功し，$b(= 1 - a)$ で失敗する．

A2. $n(= 0, 1, 2, \ldots)$ 個のサービス障害が取り除かれているとき，次のサービス障害発生時間間隔 U_n に対する分布関数 $F_{U_n}(t) \equiv \Pr\{U_n \leq t\}$ は，平均 $1/\lambda_n$ をもつ指数分布に従う．λ_n は n の非増加関数とする．

A3. 同時に 2 個以上のサービス障害が発生する確率は無視する．

A4. サービス障害を取り除く時間は考慮しない．

$\{X(t), t \geq 0\}$ を時刻 t までに取り除かれた累積障害数の計数過程とする．$X(t)$ の状態 i から状態 $n(i \leq n)$ への初到達時間間隔を表す確率変数を $S_{i,n}$,$S_{i,n}$ に対する分布関数を $G_{i,n}(t)$ とすると，$G_{i,n}(t)$ に関する再生方程式

$$G_{i,i+1}(t) = Q_{i,i+1}(t) + Q_{i,i} * G_{i,i+1}(t), \qquad (1)$$

を得る．ここで，$Q_{i,j}(t)$ は状態 i から状態 j への 1-ステップ推移確率を表す．式 (1) より，$G_{i,n}(t)$ のラプラス-スティルチェス変換は,

$$\tilde{G}_{i,n}(s) = \prod_{j=i}^{n-1} \frac{a\tilde{F}_{U_j}(s)}{1 - b\tilde{F}_{U_j}(s)}, \qquad (2)$$

と与えられる．

また，$\{S_{i,n} \leq t\} \iff \{X(t) \geq n \mid X(0) = i\}$ の同値関係を利用して，時刻 t において n 個の障害が取り除かれている確率は,

$$P_n(t) \equiv \Pr\{X(t) = n | X(0) = 0\}$$

$$= G_n(t) - G_{n+1}(t), \qquad (3)$$

と与えられる．ただし，$G_n(t) \equiv G_{0,n}(t)$ とする．

本モデルより，サービス信頼性に関わる評価尺度が導出される．時間区間 $(t, t + x]$ の間で，システムがサービス不具合を発生しない確率は,

$$R(x \mid t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n x}[G_n(t) - G_{n+1}(t)], \qquad (4)$$

で与えられる．式 (4) をサービス信頼度と呼ぶ．また，時刻 t におけるサービス不具合の発生時間間隔の期待値を平均サービス不具合発生時間間隔と呼び，これは,

$$MTSF(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n(t) - G_{n+1}(t)}{\lambda_n}, \qquad (5)$$

と求めることができる．

3. 数値例および考察

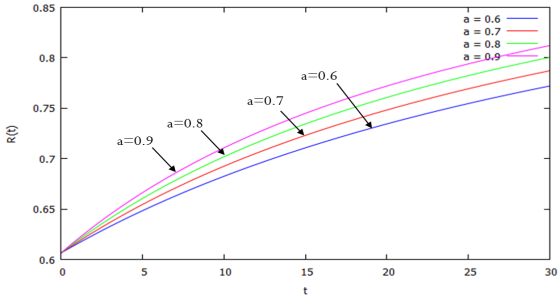

図 1: $R(1|t)$ と a の関係 $(x = 1, D = 0.5, c = 0.9)$

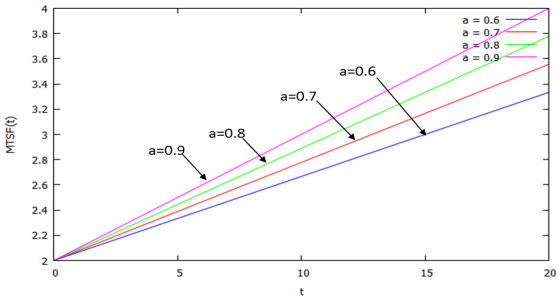

図 2: $MTSF(t)$ と a の関係 $(D = 0.5, c = 0.9)$

$F_{U_n}(t) = 1 - e^{-\lambda_n t}$, ハザードレートを $\lambda_n = Dc^n$ とする．図 1 に，式 (4) のサービス信頼度 $R(x|t)$ とサービス障害除去率 a の関係を示す．また，図 2 に，式 (5) のサービス不具合発生時間間隔 $MTSF(t)$ とサービス障害除去率 a の関係を示す．これらの図より，サービス障害の除去能力が高いほど，サービス信頼度および不具合発生時間間隔は高く評価されていることが分かる．